Függvények – Analízis

1) Legyen f és g a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{ha } x\le -1\\ 2x+1 & \text{ha } -1<x<0\\ 1 & \text{ha } x\ge 0\end{cases} \text{ és } g(x)=x^2-2$$

a) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait! (6 pont)

b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét! (8 pont)

2) Legyen adott az $f:[-2{,}5;2{,}5]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x$ függvény.

a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit! (4 pont)

b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából! (6 pont)

c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (4 pont)

3) a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3;4]$ intervallumon az $x\mapsto x^2-2|x|-3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (6 pont)

b) Legyen az f, a g és a h függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x)=x^2-2x-3$; $g(x)=x-3$, $h(x)=|x|$.

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x^2-2x-3)-3=x^2-2x-6$.

Készítse el – a fenti példának megfelelően – az f, g és h függvényekből a pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit! (6 pont)

c) Keressen példát olyan p és t, a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre $(p\circ t)(x)=(t\circ p)(x)$!

Adja meg a p és t függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

4) Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az $m(t)=12-\dfrac{10}{t+1}$ képlet; a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula: $h(t)=5\cdot\sqrt{0{,}4t+1}+0{,}4$.

Mindkét formulában t az 1969 óta eltelt időt jelöli években $(t\ge 1)$, és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagram, amely a magasság értékét az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket! (6 pont)

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot? (4 pont)

c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amely magasságát a $g(t)=t^3-16{,}5t^2+72t+60$ képlet írja le. (A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t\le 21$.) (6 pont)

5)

a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2-6x+9}$ kifejezés értelmezhető! (2 pont)

b) Ábrázolja a $[-5;8]$ intervallumon értelmezett $f: x \mapsto \sqrt{x^2-6x+9}$ függvényt! (5 pont)

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén lévő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az f értékkészlete: $[0;5]$

B: Az f függvény minimumát az $x=-3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4;8]$ intervallumon. (3 pont)

A	
B	
C	

d) Határozza meg az $\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx$ értékét! (6 pont)

6) Adott az f függvény: $f:]-1;6[\to \mathbb{R};\ f(x)=-4x^3+192x$

a) Határozza meg f zérushelyeit és elemezze az f függvényt monotonitás szempontjából! (7 pont)

Jelölje c az f értelmezési tartományának egy pozitív elemét

b) Határozza meg c értékét úgy, hogy az x tengely $[0;c]$ szakasza, az $x-c=0$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen! (9 pont)

7) a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).

Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvény lokális szélsőértékhelye!

Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!

Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! (11 pont)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)

8) Adott a $K(t)=t^2+6t+5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\leq 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;-3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+6x+5$

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

9) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A, B) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit! (4 pont)

c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve? (6 pont)

10) Adott f és g függvény.

$$f:\ D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\quad x\mapsto(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)\cdot\sin 2x$$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans! (3 pont)

$$g:\quad D_g=[-7;7]\quad x\mapsto x^2-6|x|$$

b) Számítsa ki g függvény zérushelyeit! (3 pont)

c) Adja meg g függvény értékkészletét! (3 pont)

11) Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)dx=-a^3+a$! (6 pont)

b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)dx\geq 0$? (4 pont)

c) Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvények lokális (helyi) minimuma? (6 pont)

12) Az $x^2=2y$ egyenletű parabola az $x^2+y^2\leq 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

13) Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés havi mennyisége (x mennyisége) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36-0{,}03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3-30{,}12x+13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel? (6 pont)

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? $(\text{nyereség}=\text{bevétel}-\text{kiadás})$ (10 pont)

14) A nyomda egy plakátot 14400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségek összege, ha a 14400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak? (4 pont)

b) A 14400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege? (12 pont)

15)

a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
A: a dobott számok összege prím
B: a dobott számok összege osztható 3-mal (6 pont)

b) Az 1;2;3;4;5;6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? (5 pont)

c) Az *ABCD* négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja? (5 pont)

16) Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya:
$$f(x)=-3x^3+(p-3)x^2+p^2x-6.$$

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrált, ha $p=3$ (4 pont)

b) Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x=1$ zérushelye legyen az f függvénynek! (3 pont)

c) Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x=1$ helyen pozitív legyen! (7 pont)

17) a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;7]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt! (4 pont)

b) Adja meg az f függvény értékkészletét! (2 pont)

c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $\left|x^2-6x+5\right|=p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon? (8 pont)

18) Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm^3. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2 cm^2/Ft, míg oldalának anyagköltsége 0,1 cm^2/Ft.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (13 pont)

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0;1;0;0;2;0;0;1;3;0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (3 pont)

19) Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- az üzemeltetési költség $x\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén $400+0{,}8x$ Ft kilométerenként;
- a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$-ban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f:[0;6]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{ha } x\in[0;4]\\ \dfrac{x^2-12x+36}{2} & \text{ha } x\in\,]4;6]\end{cases}$$

Számítsa ki az embléma modelljének területét! (8 pont)

20) Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

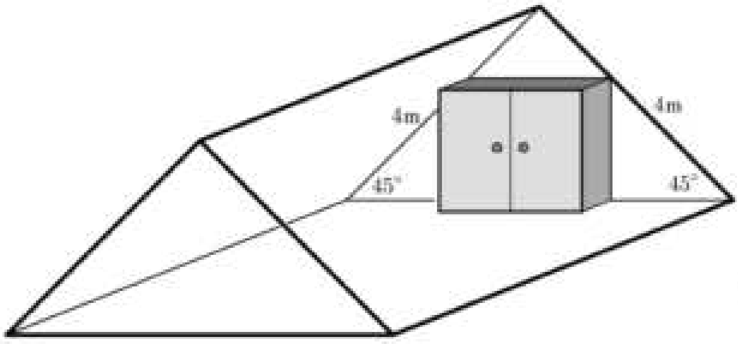
a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)

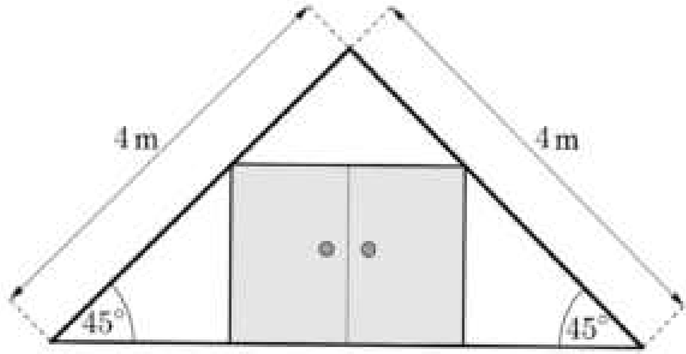
b) Az $ABCDEF$ hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

21) a) Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az $f:\,]-2;3[\,\to\mathbb{R}$; $f(x)=x^3-1{,}5x^2-6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke! (10 pont)

b) Adja meg azt a $g:\,]-2;3[\,\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy $g'=f$ (tehát az f függvény a g deriváltfüggvénye) és ezen kívül $g(2)=0$ is teljesül! (4 pont)

22) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású", a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

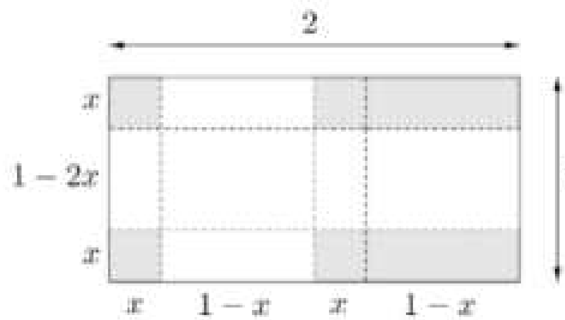
23) Adott síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y > 0$. (4 pont)

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta) (5 pont)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre! (5 pont)

24) Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méteres $\times$ 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagveszteséggel.)



a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg! (11 pont)

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).

b) Hány különböző kód lehetséges? (5 pont)

25) Adott az f és g függvény:

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ f(x) = 2x + 1;$

$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ g(x) = x^2 - 2.$

a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit! (3 pont)

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet! (7 pont)

c) Számítással igazolja, hogy a $h :]-\infty; -0{,}5[\Rightarrow \mathbb{R};\ h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő! (6 pont)

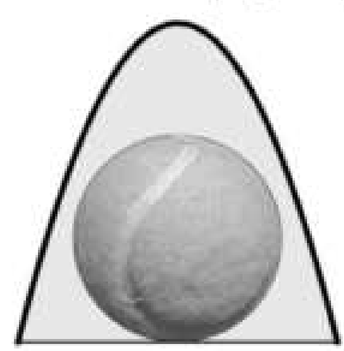
26) Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$-os kamattal számol $(p > 0)$, ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os? (8 pont)

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ határértékét, ha $q = 1{,}02$ és $H = 2000000$! (4 pont)

27) Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2{,}6y = 0$.



a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak? (6 pont)

28) Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(x)=x^4+8x^3-270x^2+275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x=-15$–ben abszolút minimuma, $x=0$-ban lokális maximuma, $x=9$-ben lokális minimuma van a függvénynek! (9 pont)

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9;5[$ intervallumon! (4 pont)

c) A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)dx$ határozott integrál értékét! (3 pont)

29)

a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot! (6 pont)

Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)

30) Adott az f, a g és a h függvény:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-1;$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x+2;$$
$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=12-x^2.$$

a) Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f és külső függvénye a h (vagyis $k(x)=h(f(x))$ minden x valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x)=11+2^{x+1}-4^x$. (3 pont)

b) Oldja meg az $f(g(x))<g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (7 pont)

c) Mekkora a h és az $x\mapsto -4 \ (x\in\mathbb{R})$ függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület? (6 pont)

31) A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^2-1800x+950000\right)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban $(x>0)$, $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg? (5 pont)

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v-502200+\frac{265050000}{v}$ kg lesz! $(v>0)$ (3 pont)

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy 800 km/h $\leq v \leq$ 1100 km/h.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a **legnagyobb**, és melyik esetén a **legkisebb** az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás? (5 pont)

32) Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív! (3 pont)

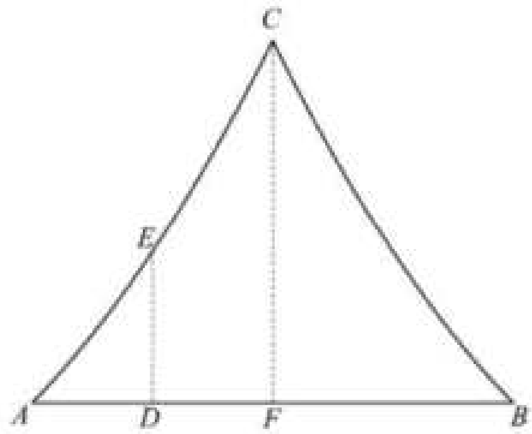
b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)dx = 0$ teljesüljön! (4 pont)

c) Határozza meg az $f:]-4; -1[\mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket! (7 pont)

33) Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.

a) Hány főből állt az eredeti társaság? (5 pont)

Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el. A homlokzat szélessége $AB = 8$ méter, magassága $FC = 6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE = 2{,}5$ méter.



b) Hány négyzetméter a homlokzat területe? (11 pont)

34) Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét! (5 pont)

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjába húzott érintő egyenletét! (5 pont)

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit! (4 pont)

35) a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendeléssel megadott függvényt (3 pont)

b) Adja meg a $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5; -4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét. (11 pont)

36) Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti.

Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt”, azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).

A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.

A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén? (6 pont)

b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális? (10 pont)

37) Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

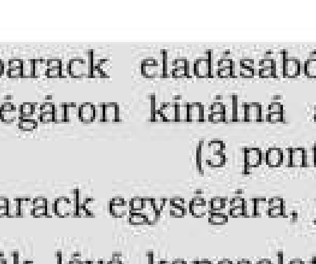
a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot? (3 pont)

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y=-\frac{1}{5}x+200\ (0<x<1000)$. (4 pont)

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.) (7 pont)

38) Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az AH és CF szakasz hossza x méter, a BE és DG szakasz hossza $2x$ méter $(0<x<2)$.

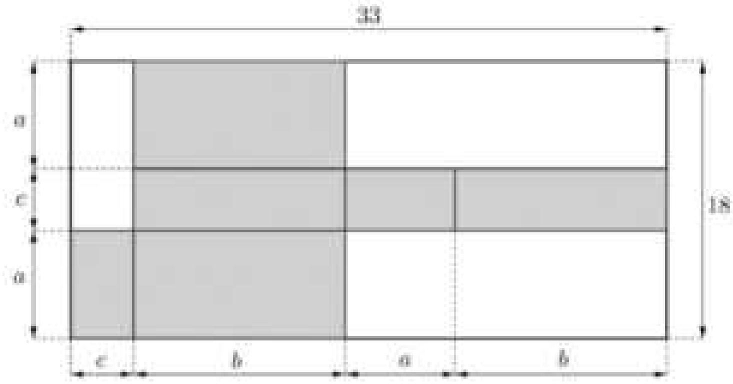


a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma hossza (m^2-ben mérve): $T(x)=4x^2-12x+16$. (4 pont)

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen! (4 pont)

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$. (6 pont)

39) Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm! (3 pont)

b) Hogyan kell megválasztani az a, b, c, élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? (9 pont)

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem? (4 pont)

40) Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk az adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a $d : [5;20] \to \mathbb{R},\ d(x) = -0{,}25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves? (2 pont)

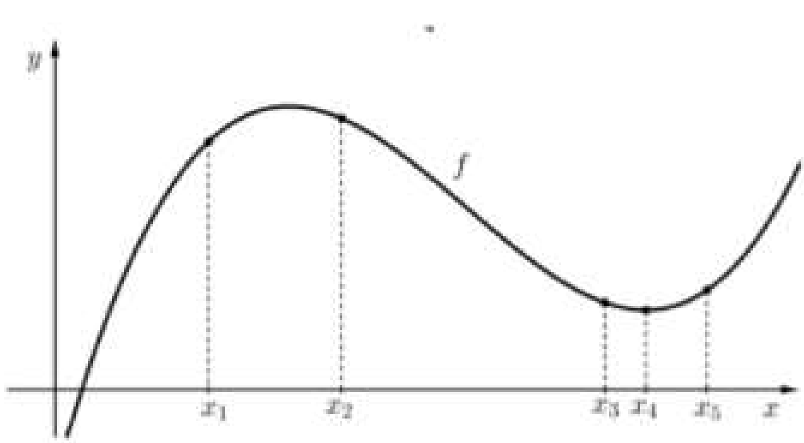
b) Hány dm^2-rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben? Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter? (5 pont)

41) a) Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet.

Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve a második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába!

(Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

(4 pont)

b) Adott az $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ egyenletű parabola.

Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x - y = k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is! (9 pont)

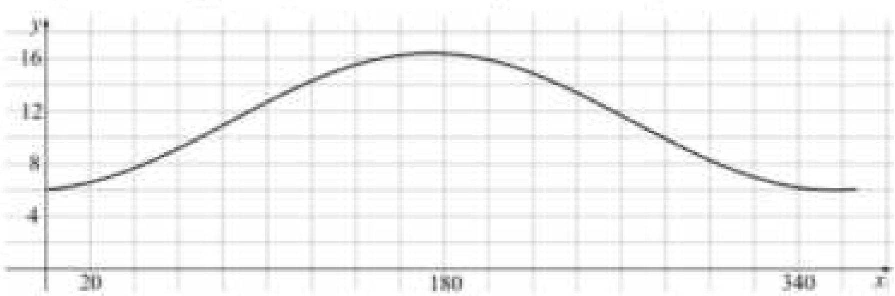
42) Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napfelkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5{,}2\cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva $(1 \le n \le 365,\ n \in \mathbb{N})$.

Az alábbi ábra a $g:[1;365] \to \mathbb{R};\ g(x) = -5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11{,}2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f-nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve! (2 pont)

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!

Válaszát óra:perc formátumban, egészre kerekítve adja meg! (3 pont)

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb! (7 pont)

Adott egy másik, az $y = -5{,}2\cos(x) + 11{,}2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét! (4 pont)

43) Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).

A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készítettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

a) Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnénk a vonaljegyek árát? (4 pont)

b) Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel? (12pont)

44) Adott két függvény:

$f:]0;130[\to \mathbb{R};\ f(x) = 900 - 0{,}25(x-60)^2$, illetve

$g:]0;130[\to \mathbb{R};\ g(x) = 6{,}4x$.

a) Adja meg az f zérushelyét! (4 pont)

b) Számítsa ki az $f(20) - g(20)$ különbség értékét! (3 pont)

c) Adja meg a $h:]0;130[\to \mathbb{R};\ h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)! (6 pont)

45) Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$f(x) = (x+4)(2-x)$

$g(x) = x+4$

$h(x) = x^2 - 4$

$i(x) = |x| - 4$

a) Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét! (7 pont)

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

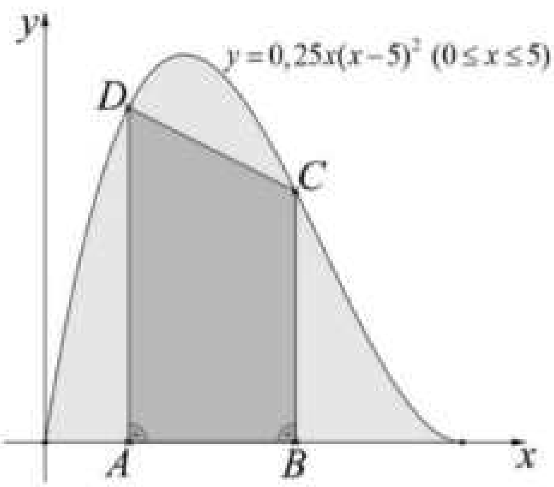
b) Rajzolja fel az így kapott gráfot! (4 pont)

A valós számok halmazán értelemezett k függvény zérushelye -5 és 3, az m függvény zérushelyei 3 és -3, az n függvény zérushelyei pedig 5 és -5.

A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

c) Hányféleképpen válaszható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k, m, n és p függvényekre a b) feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen? (5 pont)

46) Adott az $y=0,25x(x-5)^2$ $(0\le x\le 5)$ egyenletű görbe.



a) Igazolja, hogy az origó és az $(5;0)$ pont is rajta van a görbén!

Az $ABCD$ derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az $A(1;0)$, illetve a $B(3;0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A megadott görbe és az x tengely $[0;5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.

b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznak is pontja lesz? (10 pont)

47)

a) Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2-2x+4=mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van. (6 pont)

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{3}{(1+\cos x)^2+2}$ függvény értékkészlete az $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ intervallum. (5 pont)

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés igaz? (5 pont)

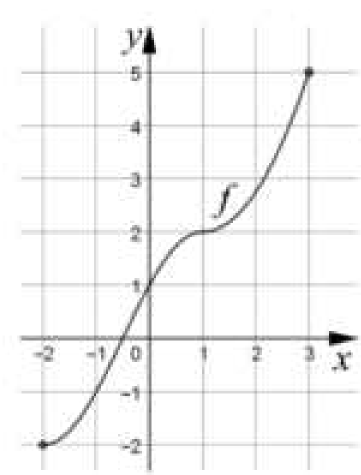
48) Egy nyolcfős csapat kosárlabdaedzése közben mind a nyolcan 10-szer kíséreltek meg hárompontost dobni. A sikeres dobások számát mind a nyolc főnél felírták. A feljegyzett számok: 6, 3, 7, 6, 4, 7, 8 és 7.

a) Határozza meg a sikeres dobások számának átlagát, mediánját és szórását! (4 pont)

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45°-os szögre törekszik a dobás indításánál.

b) Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0;2)$ és a $Q(4,6;3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45°! A parabola egyenletét $y=ax^2+bx+c$ alakban adja meg! (8 pont)

Az ábrán a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos f függvény grafikonja látható.



c) Adja meg az f inverzfüggvényének értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából! (4 pont)

49) Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n-szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$. Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik! (3 pont)

b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne! (9 pont)

Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50000 Ft-osból.

c) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét! (4 pont)

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50000
nyeremény valószínűsége	0,95		

50)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left(2^x - 3\right)^2 = 2^{x+1} + 9$$ (7 pont)

Legyen $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ahol x valós szám.

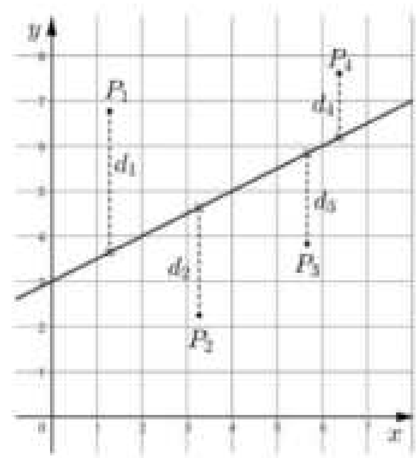
Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$."

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! (4 pont)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja! (3 pont)

51) A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.

Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)



a) Határozza meg az $R(4;2)$ és az $S(4;5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$ egyenestől! (3 pont)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak **négyzetösszege** (az ábrán látható példában $d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2} + d_4^{\,2}$).

Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1;3)$, $B(3;5)$ és $C(4;4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A, B* és *C* pontokra! $(m \in \mathbb{R})$ (6 pont)

Az $y = \frac{1}{3}\left(-2x^2 + 11x\right)$ egyenletű g görbe áthalad a megadott A és B pontokon, a h egyenes pedig az origón és a C ponton.

c) Mekkora a g és h által közbezárt korlátos alakzat területe? (7 pont)